



Jak lze vytvořit...

Vítejte v rubrice, která se v jednotlivých volně navazujících kapitolách zabývá NC programováním a obráběním základních konstrukčních prvků. Každý z příkladů je připraven jen pro krátkodobou internetovou prezentaci a následně je nahrazen novějším. Jednotlivé příklady na sebe přímo nenavazují, avšak postupně se zaměřují na hlubší rozbor jednotlivých "problémů" (např. možnosti při NC programování, problematika volby nástrojového vybavení, optimalizace řezných podmínek, atd.). Pro větší názornost jsou jednotlivé příklady zpracovány a prezentovány s podporou jednoho z nejužívanějších řídicích systémů v ČR, Sinumeriku 840D a výukového programu SinuTrain.

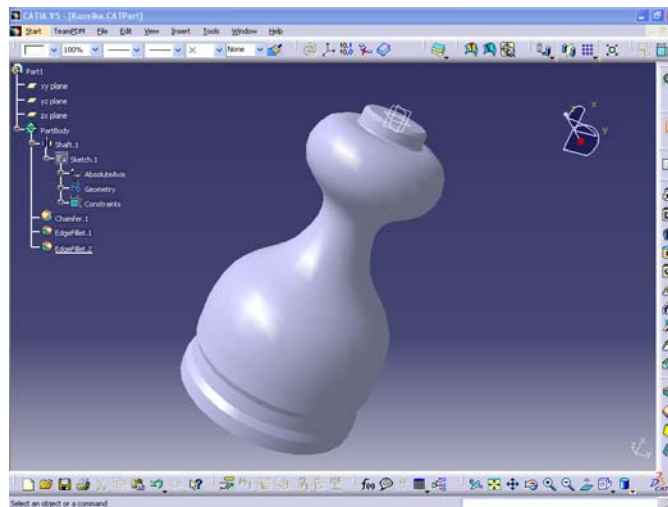
Zpracoval: Ing. Aleš Polzer

Křivka typu "spline" v systému SinuTrain

1. Úvod

V dnešní době je velice často využívána výpočetní technika a stále se rozvíjející programové vybavení nás nutí učit se a chápat řadu pojmů a principů. Následující příklad se proto zaměřuje na jednu z možností NC programování, kterou lze aplikovat při výrobě tvarových ploch soustružením. V krátkosti seznamuje s programem SinuTrain verze 06.03 (beta, 06.10.2003) při programování rotačních součástí, jejichž tvar je definován křivkou typu "spline". Již zde bych proto mohl připomenout, že pomocí interpolace "spline" lze spojovat např. digitalizované body do hladkých křivek. Lze ji však použít, kdykoli je zapotřebí skupinu bodů "spojit" křivkou namísto lineární interpolace mezi jednotlivými body.

Zvolená součástka pro popis této problematiky je naznačena na obr. 1. Pro teoretický rozbor jednotlivých druhů křivek jsou však použity odlišné polohy opěrných (kontrolních) bodů, které zdůrazňují rozdíly mezi jednotlivými křivkami typu "spline". Pozornost je věnována i způsobu zápisu programového kódu (G-kódu).



Obr. 1 Model součástky v CAD prostředí programu Catia

2. Rozbor možností a tvorba NC programu

Rotační součástky s plynulými přechody mezi zaobleními lze snadno vyrábět na CNC obráběcích strojích. Řada z nich navíc umožňuje vedení nástroje po křivkových drahách, které nelze (snadno) rozložit na přímkové a kruhové elementy. Jedná se o křivky typu "spline", jejichž tvar je vždy definován skupinou bodů. V systému Sinumerik 840D jsou tři různé typy křivek "spline", které mají rozdílné vlastnosti. Tyto vlastnosti ovlivňují tvar křivky a hladkost napojení mezi jednotlivými body. Navržení optimálního tvaru je často výsledkem zdoluhavé práce. NC programování i přesnost výroby tvarových součástí pak usnadňuje možnost využití korekcí (korekce poloměru nástroje).

K dispozici jsou následující křivky:

- A-Spline (křivka Akima-Spline)
- B-Spline (nejednotná, racionální křivka Basic-Spline, NURBS)
- C-Spline (kubická křivka Spline)

Programování:

ASPLINE X Y Z A B C

BSPLINE X Y Z A B C

CSPLINE X Y Z A B C

A-SPLINE

Tato křivka je zpravidla doporučována pro interpolaci bodů získaných digitalizací. Prochází všemi opěrnými body, ve kterých není plynule zakřivená. Tvarování křivky lze realizovat změnou polohy opěrného bodu, přičemž tato změna se projeví i v 6-ti sousedních bodech. Křivka nevytváří nežádoucí chvění a pro interpolaci je používán polynom 3. stupně.

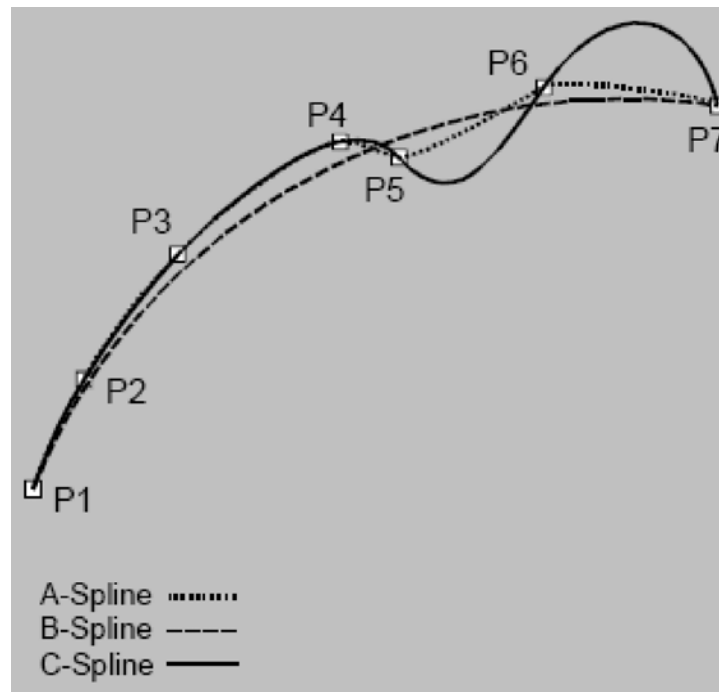
B-SPLINE

Princip vzniku křivky typu B je v praxi využíván při konstrukci např. automobilových karoserií a jiných aerodynamických tvarů. Je kombinací křivky Hermitovy a Bezierovy. Při jejím programování zpravidla hovoříme o definování polohy kontrolních (uzlových) bodů, kterými křivka neprochází, ale je jimi pouze "přitahována". Výjimku tvoří pouze první a poslední bod, ve kterém křivka skutečně začíná a končí. Křivka nevytváří chvění a je plynule zakřivená. Je možno ji doporučit jako nejvýhodnější pro naznačený příklad obrábění

součásti na obr.1. Mezi její hlavní výhody patří možnost naprogramování různých vah uzlových bodů, čímž lze výslednou křivku poměrně snadno tvarovat. Běžně je tzv. hmotnost bodu rovna 1. Požadujeme-li, aby kontrolní bod zůstal na svém místě, ale přesto byla vznikající křivka tímto bodem více přitahována (tvarována), lze zvyšovat hmotnost tohoto bodu až na hodnotu 3 s krokem 0,0001. V opačném případě lze hmotnost bodu snižovat až na hodnotu 0 se stejným krokem.

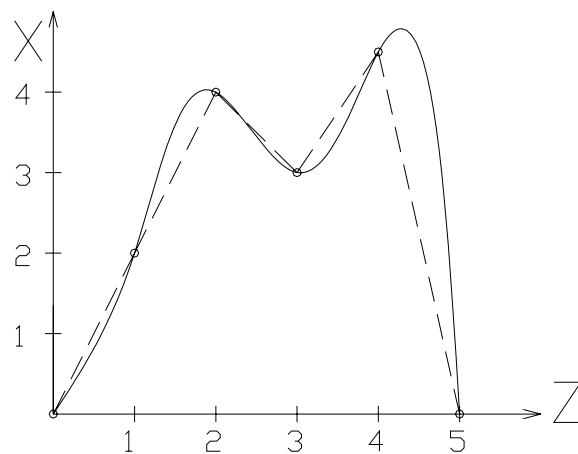
C-SPLINE

Třetím a závěrečným typem je kubická křivka, která je plynule zakřivená v opěrných bodech. POZOR!!! Má sklon k nečekanému chvění. Lze ji použít v případech, kdy uzlové body leží na analyticky známé křivce. Prochází všemi opěrnými body a změna polohy některého z bodů se s ubývající silou projevuje ve velkém okolí (změna není lokální). C-spline je rovněž považována za nejznámější a nejužívanější.

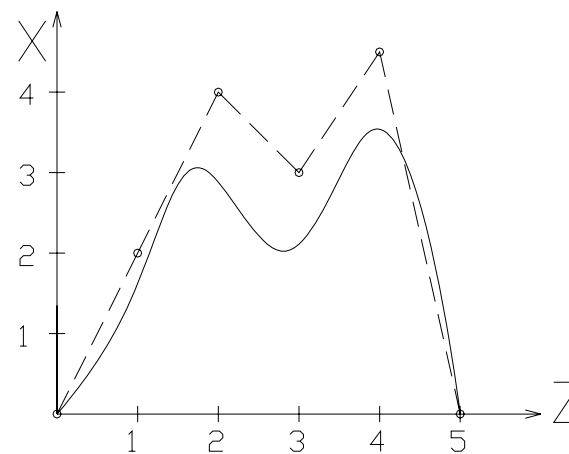


Obr. 2 Srovnání tří typů (průběhů) "splínů" při zachování uzlových (opěrných) bodů
(obr. převzat z: Příručka programování - pro pokročilé)

Pozn.: Výše naznačené druhy křivek i princip váhových bodů vychází ze způsobu programování SinuTrainu. Např. u programu AutoCAD je při volbě "spline" k dispozici možnost programovat toleranci vyhlazení křivky (obr.3) a "váhu" jednotlivých bodů (obr.4). AutoCAD využívá křivky typu NURBS.

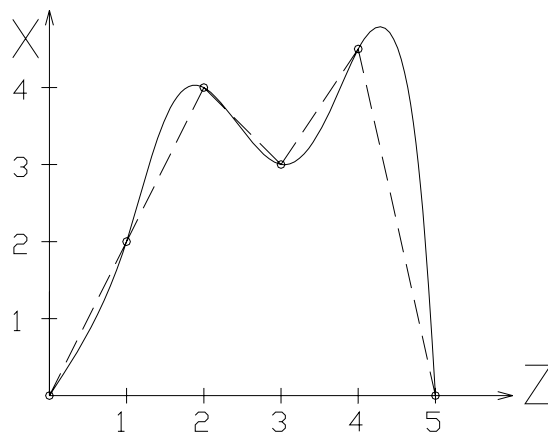


Tolerance vyhlazení = 0

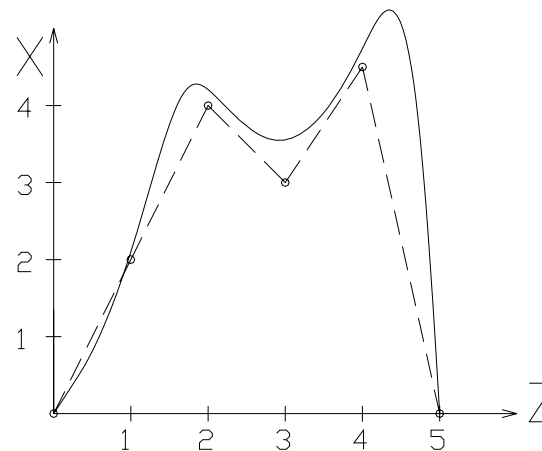


Tolerance vyhlazení = 10

Obr. 3 Tolerance vyhlazení - maximální vzdálenost, v níž může křivka "spline" procházet od uzlových bodů



"Hmotnost" všech bodů = 1



"Hmotnost" bodů rozdílná

([0,0] = 0.3; [1,2] = 2; [2,4] = 1; [3,3] = 0.5; [4,4.5] = 1; [5,0] = 1)

Obr.4 Změna tvaru křivky B-spline vlivem "hmotnosti" bodů

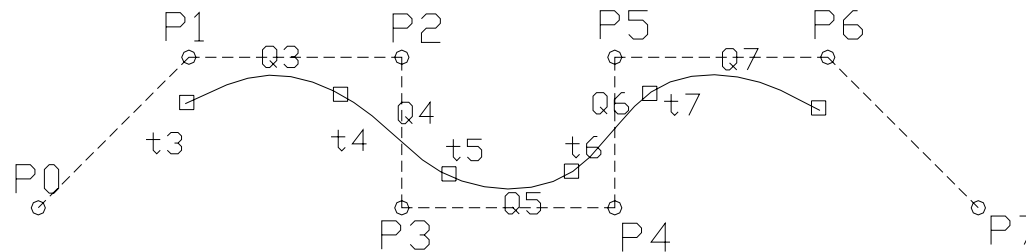
3. Podíváme-li se na křivky "spline" z matematického pohledu, zjistíme, že:

Přirozený "spline" interpoluje své řídicí body, je to tedy interpolační křivka skládající se z polynomiálních oblouků stupně tři, která je ve svých uzlech spojitá. Výpočet přirozeného "spline" vede k úloze výpočtu inverzní matice k matici $(m+1) \times (m+1)$, kde m je počet bodů řídicího polygonu. Nevýhodou těchto křivek je, že změnou polohy jediného definujícího bodu se změní tvar celé křivky.

Nejprve bude uveden nejjednodušší případ, neracionální a uniformní B-Spline. Jeho zobecněním je uniformní racionální B-Spline, neboli NURBS.

3.1 Uniformní neracionální kubický B-spline

Uniformní neracionální kubický B-spline vznikne navázáním segmentů Q_i , který je určen body $P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i$. Následující segment Q_{i+1} je definován body P_{i-2}, P_{i-1}, P_i a P_{i+1} , tedy třemi posledními body segmentu Q_i a jedním bodem segmentu následujícího. B-spline je tedy určen $n \geq 4$ a skládá se z $n-3$ segmentů.



Obr. 5 B-spline

Hladké napojení B-splinu:

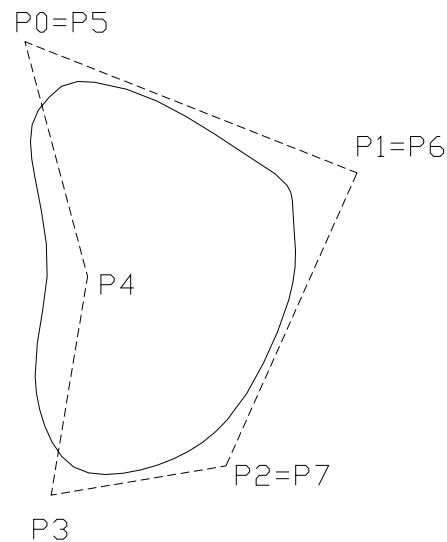
Porovnáme-li vztahy pro tečné vektory a vektory druhých derivací dvou po sobě následujících segmentů Q_i a Q_{i+1} , zjistíme, že segment Q_{i+1} vychází z posledního bodu segmentu Q_i a že jsou identické první a druhé derivace v tomto bodě. Křivka je tedy v bodech spojitá.

Definice krajních bodů "splinu":

Chceme-li, aby B-spline procházel krajními body svého řídicího polygonu, musíme využít násobnosti bodů. Tzn. zvolíme-li posloupnost bodů $P_0, P_0, P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n, P_n, P_n$, zajistíme, že výsledný kubický "spline" bude procházet krajními body svého řídicího polygonu, ovšem za tu cenu, že první segment bude úsečkou spojující bod P_0 s bodem ležícím v jedné šestině úsečky $P_0 P_1$ a analogicky poslední segment na konci řídicího polygonu.

Tvorba uzavřeného "splinu":

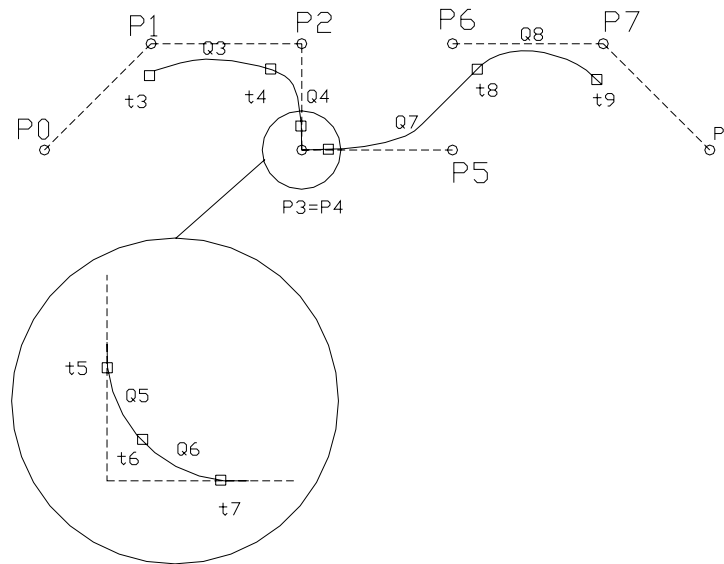
Uzavřený B-spline získáme opakováním prvních tří bodů řídicího polygonu na jeho konci. Pro kubický B-spline je tedy řídicím polygonem uzavřené křivky posloupnost bodů: $P_0, P_1, \dots, P_m, P_0, P_1, P_2$.



Obr.6 Uzavřený "spline"

Násobnost bodu:

Díky tomu, že segment leží v konvexní obálce svého řídicího polygonu, je možné pochopit, co se stane, je-li některý bod řídicího polygonu vícenásobný. Podívejme se na níže uvedený obr.7 a můžeme sledovat, co se děje, když zvyšujeme násobnost bodu P3.



Obr. 7 Násobnost bodu P3

Segment Q4 je určen uzly t4 a t5 a řídicím polygonem P1, P2, P3, P4 a segment Q5 uzly t5 a t6 a řídicím polygonem P2, P3, P4, P5 . V případě , kdy není žádný bod několikanásobný, mají všechny řídicí polygony čtyřúhelníka a konvexní obálky dvou po sobě následujících segmentů (pro náš případ řídicí polygony segmentů Q4 a Q5) společnou plochu vymezenou trojúhelníkem P2, P3, P4 . V této oblasti také leží společný uzel t5 . Na výše uvedeném obr.7 zdegenerovaly čtyřúhelníky P1, P2, P3, P4 a P2, P3, P4, P5 na trojúhelníky tím, že překrývající se oblastí je společná hrana P2 P3 . Na této hraně musí tedy ležet i uzel t5 .

3.2 Neuniformní racionální B-spline (NURBS)

Neuniformní racionální B-spline křivky jsou dvojím zobecněním B-spline křivek výše uvedených. Termín neuniformní je odvozen od vzdálenosti uzlů ve smyslu parametru t , která nemusí být u těchto křivek konstantní. Racionalita znamená, že body jsou reprezentovány svými homogenními souřadnicemi.

Křivka NURBS je určena $n+1$ body řídicího polygonu, uzlovým vektorem U délky $m+1$ a stupněm křivky p . Uzlový vektor pro křivku NURBS procházející prvním i posledním bodem řídicího polygonu a má tvar:

$$U = (0, 0, \dots, 0, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, \beta, \beta, \dots, \beta).$$

Hodnoty uzlů musí být neklesající, tedy: $t_{i+1} \geq t_i$. Sekvence nul na začátku, stejně jako sekvence posledních hodnot (bývá zvykem volit $\beta = 1$) má násobnost $p+1$. Zbývajících hodnot je $m+1$. Mezi počtem uzlů $m+1$, stupněm p křivky a počtem bodů řídicího polygonu $n+1$ platí vztah:

$$m = n + p + 1.$$

Křivka NURBS je potom určena vztahem:

$$Q_{(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n w_i P_i N_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i P_i N_{i,p}(t)}, \quad (3.2.1)$$

kde w_i je váha i -tého bodu řídicího polygonu a $N_{i,p}(t)$ jsou normalizované B-spline báze funkce určené rekurentním vztahem:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad (3.2.2)$$
$$N_{i,p}(t) = \frac{(t - t_i)}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{(t_{i+p+1} - t)}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i,p+1,p-1}(t).$$

Během výpočtu se vyskytují i výrazy, které mají ve jmenovateli nulu. V takových případech se smluvně uvažuje hodnota výrazu nulová.

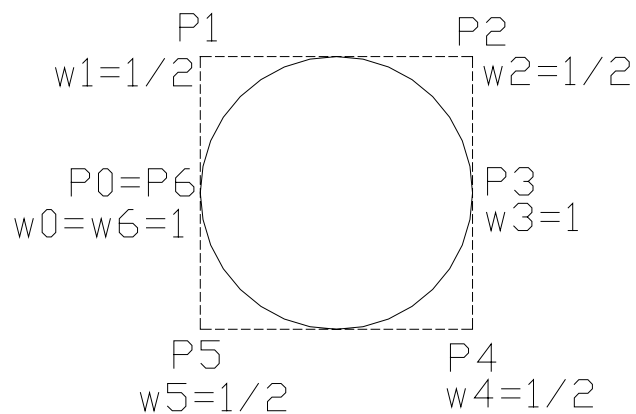
Jiný zápis využívá racionální B-spline:

$$R_{i,p} = \frac{w_i N_{i,p}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j N_{j,p}(t)} \quad , \quad (3.2.3)$$

Rovnici lze napsat jednodušeji:

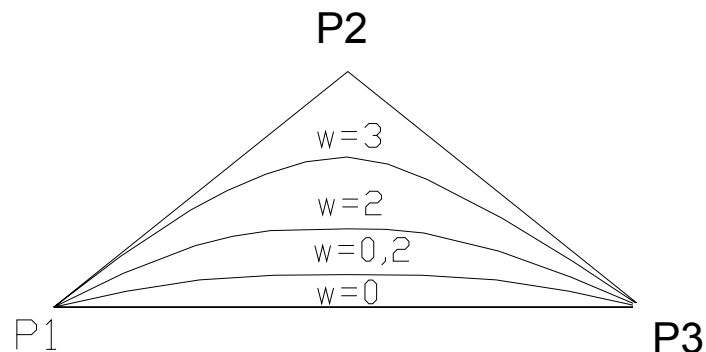
$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,p}(t) \quad . \quad (3.2.4)$$

Kružnice definovaná jako NURBS:



Obr. 8 Kružnice definovaná jako NURBS

Vliv váhy bodu na racionální B-spline:



Obr. 9 Různé váhy bodů

Křivky NURBS mají tyto vlastnosti:

1. Při zadání uzlového vektoru podle vztahu $U = (0, 0, \dots, 0, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, \beta, \beta, \dots, \beta)$ procházejí křivky prvním a posledním bodem řídicího polygonu.
2. Leží v konvexní obálce svého řídicího polygonu, stejně tak jejich jednotlivé segmenty leží v obálcích svých řídicích polygonů. Změna polohy resp. váhy jednoho bodu m má tedy vliv pouze na část křivky.
3. Jsou invariantní vůči transformacím a především vůči rovnoběžnému a středovému promítání.
4. Umožňují přesné vyjádření kuželoseček.

4. NC programování křivek "spline"

Z pohledu NC programování již problematika výše popisovaných matematických křivek není tak složitá. Podívejme se na část řídicího programu, která předepisuje proložení řídicích bodů křivkou. Nejprve je zpravidla realizován pohyb lineární nebo kruhovou interpolací do startovacího bodu. Následuje funkce ASPLINE, BSPLINE nebo CSPLINE a výpis uzlových bodů. Opětovným voláním lineární nebo kruhové interpolace je "spline" ukončena.

Příklad části programu:

- "váha" všech bodů je 1

N100 G1 X=20 Z=-5.293

N110 BSPLINE

N120 Z=-7.321 X=25.484

N130 Z=-8.033 X=27.28

N140 Z=-8.558 X=28.532

...

N300 Z=-78.969 X=57.993

N310 Z=-85.001 X=57.997

N320 G1 Z=-86.678 X=57

- "váha" bodů je rozdílná

N100 G1 X=20 Z=-5.293

N110 BSPLINE

N120 Z=-7.321 X=25.484 PW=2

N130 Z=-8.033 X=27.28

N140 Z=-8.558 X=28.532 PW=0.5

...

N300 Z=-78.969 X=57.993

N310 Z=-85.001 X=57.997

N320 G1 Z=-86.678 X=57

Kompletní řídicí program pro obrábění součásti naznačené na obr. 1 je uložen v adresáři [Kuzelka.wpd](#). Simulace je provedena v programu *SinuTrain 06.03 (beta, 06.10.2003)* modulu *Turning machine with simple tools*. Pro jednoduchost je aplikován pouze jeden soustružnický nůž na hrubování cyklem CYCLE95 i dokončování BSPLINE.

5. Závěr

Naznačená problematika obrábění tvarů definovaných pomocí matematických křivek vedla k úspěšnému vyrobení série 10-ti požadovaných součástí (obr.10). Způsob generování polohy řídicích bodů bude rozpracován v některém z následujících příkladů.

S ohledem na neustále se rozvíjející možnosti CAD/CAM programů, řídicích systémů obráběcích strojů i nově vyvíjené nástrojové vybavení budou v následujících kapitolách jednotlivé technologie zdokonalovány. Některé příklady je vhodné řešit v rovině teoretické, na jiné je vhodné nahlédnout z praktického pohledu. Máte-li proto pocit, že ve vaší firmě je řešeno obrábění, o kterém je možno touto formou informovat širší veřejnost, **neváhejte a připojte se k týmu autorů.**

Článek vznikl za spolupráce Vysokého učení technického v Brně, FSI, ÚST, Odboru technologie obrábění s firmou Siemens a redakcí Technického týdeníku.



Obr. 10 Fotografie vyrobené součástky

Přehled souvisejících odkazů:

<http://ust.fme.vutbr.cz/obrabeni>

<http://cadcam.fme.vutbr.cz>

<http://cnc.fme.vutbr.cz>

<http://esf.fme.vutbr.cz>

SIEMENS

<http://www.siemens.cz>

<http://www.ad.siemens.de/doconweb>

<http://www.techtydenik.cz>

Kontaktní osoba:

Vysoké učení technické v Brně
Odbor technologie obrábění
Technická 2896/2
616 69 Brno

Ing. Aleš Polzer
Tel.: 5 4114 2559

E-mail: polzer@fme.vutbr.cz

[Předchozí](#)